Publicaciones de la Cátedra Bolívar.
Facultad de Economía y Empresa de la USC. Director Luis Caramés Vieitez
Temas de Teoría Económica y su Método nº 11
Documento 113 de la Serie Economic Development

Los documentos 103 a 118 de esta serie han sido publicados por la Cátedra Bolívar de la USC en el libro, editado por Juan José Jardón Urrieta (UMSNH) "Temas de Teoría Económica y su Método"
Web de la Cátedra Bolívar:
http://www.usc.es/es/goberno/vrrelins/catedras/bolivar/index.html
USC= Universidad de Santiago de Compostela (España)
UMSNH= Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (México)

ALGUNOS PRINCIPIOS FINANCIEROS QUE SON CONSISTENTES CON EL POSTULADO DE RACIONALIDAD ECONÓMICA

Francisco VENEGAS-MARTÍNEZ
Escuela Superior de Economía
Instituto Politécnico Nacional, México

Resumen:
Este trabajo de investigación muestra la consistencia de los principios financieros más importantes con la noción de racionalidad económica *perfecta*, lo cual sugiere que la existencia de consumidores racionales es un postulado *conveniente* para el desarrollo *adecuado* de la teoría económica. Para ello la ecuación diferencial parcial (EDP) de Black-Scholes-Merton (BSM) que determina el precio del producto derivado se obtiene bajo diferentes principios financieros tales como condiciones de no arbitraje, modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), portafolios replicantes, VPN (valor presente neto), modelo de Markowitz, etc. Posteriormente se obtiene exactamente la misma ecuación de BSM utilizando un consumidor-inversionista maximizador de utilidad sujeto a su restricción presupuestal, lo que confirma la consistencia de dichos principios financieros con la racionalidad económica.
JEL Codes: A1, B4

I. Introducción

Este trabajo de investigación muestra la consistencia de los principios financieros más importantes con la noción de racionalidad económica "perfecta", lo cual sugiere que la existencia de consumidores racionales es un postulado "conveniente" para el desarrollo "adecuado" de la teoría económica. Para ello, la ecuación diferencial parcial (EDP) de Black-Scholes-Merton (BSM) que determina el precio de un producto derivado se obtiene bajo diferentes principios financieros tales como: condiciones de no arbitraje, modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), portafolios replicantes, VPN (valor presente neto), modelo de Markowitz, etc. Posteriormente, se obtiene exactamente la misma ecuación de BSM utilizando un consumidor-inversionista maximizador de utilidad sujeto a su restricción presupuestal, lo que confirma la consistencia de dichos principios financieros con la racionalidad económica.

El postulado de racionalidad económica ha sido, desde hace varias décadas, un asunto de continuo debate sobre el comportamiento de los agentes económicos cuando éstos toman decisiones de consumo y portafolio. Se dice que un consumidor es racional si resuelve problemas de optimización a través de un proceso instantáneo que se lleva a cabo desde su cerebro. Evidentemente, no ha sido fácil de aceptar que los consumidores cuando toman decisiones de consumo y portafolio, lo hacen de tal manera que maximizan una función de utilidad sujetos a su restricción presupuestal, ya que esto involucra un proceso complejo de abstracción para plantear problemas de optimización y otro proceso todavía más elaborado para resolverlos de manera instantánea. Peor aún, cuando la toma

de decisiones se realiza en un ambiente de riesgo e incertidumbre, entonces el planteamiento y la resolución del problema de optimización se convierte en un asunto muy sofisticado.

Desde hace muchas décadas varios intentos se han hecho para relajar el concepto de racionalidad económica perfecta (o hiper-racionalidad). Uno de los intentos más importantes se refiere al trabajo pionero de Herbert Simon (1957) quien ya planteaba la noción de racionalidad limitada (o acotada) en la que, primero, el individuo elige una función de utilidad entre un conjunto de funciones disponibles en su cerebro y, posteriormente, ordena en términos de sus preferencias las posibles alternativas siguiendo un proceso que no es tan "fino" como el que exigirían las condiciones de primer orden de un problema de optimización, siendo el ordenamiento de posibilidades más bien un proceso "burdo" en el sentido que revisa grupos de alternativas y elige, casi instantáneamente, aquellas que pudieran estar cerca del óptimo. Por otro lado, la "economía experimental" ha logrado un avance impresionante, desde el trabajo seminal de Vernon Smith (1962), mostrando con experimentos conducidos la ausencia del comportamiento racional "perfecto" en los agentes. Por lo anterior, se podría decir que la racionalidad económica "perfecta" es un postulado falso, aun cuando existieran buenas aproximaciones.

El partir de postulados falsos para desarrollar una teoría no necesariamente es un problema. Por ejemplo, la mecánica clásica se basa en tres postulados (las tres leyes de Isaac Newton (1643-1727)). Sin embargo, el primer postulado conduce a la existencia de sistemas inerciales y tales sistemas no se encuentran en el universo, aunque haya buenas aproximaciones (estrellas lejanas que sirvan como puntos de referencia). En este caso, aun cuando se parte de un postulado falso, los resultados que se desprenden de él sí describen y explican muchos fenómenos naturales. En consecuencia, la primera ley de Newton, aunque falsa, es "conveniente" para el desarrollo "adecuado" de gran parte de la física (la física clásica). Otro ejemplo similar es el postulado de la inexistencia de monopolos magnéticos, el cual sirve para establecer una de las ecuaciones de James Clerk Maxwell (1831-1879) del electromagnetismo. Este postulado no se sabe, hasta la fecha, si es falso o no, sin embargo se sabe que es conveniente para el desarrollo adecuado de la teoría electrodinámica clásica.

Este trabajo de investigación muestra la consistencia entre los principios financieros más importantes y la noción de racionalidad económica "perfecta". Para ello, la ecuación diferencial parcial (EDP) de Black-Scholes-Merton (BSM) cuya solución determina el valor de un producto derivado se obtiene bajo diferentes principios financieros tales como: condiciones de no arbitraje, cobertura de la riqueza, argumentos tipo CAPM, portafolios replicantes y autofinanciables, valor presente neto (VPN) y el modelo de Markowitz (1952) y Sharpe (1964). Posteriormente, se obtiene exactamente la misma ecuación utilizando el postulado de racionalidad económica: un consumidor-inversionista maximizador de utilidad sujeto a una restricción presupuestal que considera la posibilidad de integrar un portafolio con un bono libre de riesgo (de incumplimiento), un activo riesgoso (una acción) y un producto derivado sobre dicho activo (una opción). Lo anterior, quiere decir que el postulado de racionalidad económica es consistente con muchos de los resultados que se obtienen de la aplicación de los principios fundamentales que se utilizan en la teoría y práctica financiera. En otras palabras, los principios fundamentales conllevan de manera implícita el principio de racionalidad económica; situación que vuelve a traer al centro de la discusión la aceptación o no de dicho postulado o de cualquiera de sus formas relajadas. Por último, es importante destacar que la mayor parte de esta investigación toma como punto de partida los trabajos de Black y Scholes (1973); Markowitz (1952); Merton (1969), (1971) y (1973); Sharpe (1964); y Venegas-Martínez (2001), (2005), (2006a), (2006b), (2006c) y (2008).

El trabajo está organizado como sigue. En la sección II se obtiene la EDP de BSM utilizando condiciones de no arbitraje. En esta sección se lleva a cabo un análisis detallado y riguroso sobre el modelo de BSM ya que éste es central para el desarrollo de la presente investigación. En el transcurso de la sección III se deriva la EDP de BSM mediante la condición de cobertura de la riqueza. A través de la sección IV se genera de la EDP de BSM mediante el uso del modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model). En la sección V se obtiene la EDP de BSM mediante el uso de portafolios replicantes y autofinanciables. En la sección VI se reproduce de la ecuación BSM mediante el método del valor presente neto. En el transcurso de la sección VII se obtiene la ecuación BSM con base en el modelo de Markowitz. En la sección VIII, con el fin de mostrar que los principios financieros, presentados en las secciones II-VII, llevan consigo de manera implícita la noción de racionalidad económica se obtiene, con cierto detalle, la ecuación BSM bajo el supuesto de que existen consumidores-inversionistas que maximizan utilidad sujetos a su restricción presupuestal. En la sección IX se presentan las conclusiones. Por último, se incluye un apéndice sobre el lema de Itô.

II. Obtención de la ecuación diferencial parcial de BSM mediante condiciones de no arbitraje

En 1973, Fischer Black y Myron Scholes y, de manera independiente, Robert Merton desarrollaron, bajo el supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje (ley de un solo precio), un modelo para valuar una opción europea cuando el precio del activo subyacente es conducido por un movimiento geométrico Browniano (los rendimientos del activo son normales con media cero y varianza dependiente del tiempo).

El modelo BSM ha fomentado de manera importante que los participantes en los mercados financieros se cubran contra los diversos riesgos a que están expuestos. También ha desempeñado un papel central en el avance tan impresionante que ha tenido, recientemente, la economía financiera y las matemáticas financieras modernas. Ante todo esto, es importante destacar que el modelo BSM puede ser empleado como herramienta para generar ganancias de millones de dólares en periodos cortos de tiempo (unas semanas), pero también si no se utiliza adecuadamente puede generar pérdidas astronómicas en periodos de tiempo aún más cortos (unos días). La importancia práctica del modelo BSM radica en que su aparición es casi simultánea con el arranque de la bolsa de opciones “Chicago Board of Options Exchange”.

Antes de escribir cualquier ecuación es imprescindible establecer los supuestos básicos del modelo clásico de Black-Scholes-Merton, a saber:

[i.] El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato;

[ii.] el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, es decir, los rendimientos son normales con media cero y varianza dependiente del tiempo.

[iii.] la volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo;

[iv.] las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas, es decir, se puede pedir prestado el activo para venderlo en el presente y hacer uso del efectivo, y posteriormente cuando se tiene que devolver el activo, se recompra (si es posible) a un precio menor a fin de generar alguna ganancia;

[v.] el mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente siempre se puede vender en cualquier fracción de unidad;

[vi.] no hay costos de transacción (comisiones e impuestos);

[vii.] el mercado opera en forma continua, es decir, no hay fines de semana ni días festivos;

[viii.] existe un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos;

[ix.] no existen oportunidades de arbitraje (no hay ganancias libres de riesgo).

Dinámica del precio del subyacente y riesgo de mercado

Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{\in[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada

$$\left(Q, F, \left(F_t^W\right)_{t\in[0,T]}, P\right).$$

Esto es, W_t es una variable aleatoria normal con media cero y varianza t,Q es un espacio muestral (el conjunto de todos los posibles resultados), F es una σ-álgebra (un conjunto de eventos), F_t^W representa toda la información sobre precios disponible al tiempo t y P es una medida de probabilidad. Se supone que el precio del activo subyacente al tiempo t, S_t es conducido por el movimiento geométrico Browniano, es decir, los rendimientos del activo son normales con media cero y varianza t,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{1}$$

En este caso, el parámetro de tendencia, $\mu \in R$, representa el rendimiento medio esperado y $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea por unidad de tiempo. El proceso dW_t modela las fluctuaciones propias del rendimiento del subyacente y, como se sabe, satisface:

$$dW_t \sim N(0, d_t),\ E[dW_t] = 0,\ \text{y}\ Var[dW_t] = E[(dW_t)^2] = dt.$$

Dinámica del precio de la opción

El valor, o precio, de una opción europea de compra es claramente función de los distintos parámetros que intervienen en los términos o cláusulas del contrato, tales como: el precio de ejercicio K y la vida del contrato $T - t$, donde T es la fecha de vencimiento y t es la fecha de inicio del contrato. Por supuesto, el valor de dicha opción también dependerá de las características del activo subyacente, tales como: su precio, S_t, rendimiento esperado, μ, y volatilidad, σ, así como la tasa de interés, r, que prevalece en el mercado de crédito. Así, el valor de una opción europea como

$$c = c(S_t, t; K, T, \sigma, \mu, r). \tag{2}$$

Observe que S_t (precio del activo al tiempo t) y t (fecha en que se inicia el acuerdo) son las variables relevantes en el contrato. En lo que sigue, no se hará medición explícita de los parámetros T, K, r, y σ, excepto cuando sea necesario. Es decir, el valor de la opción se denotará simplemente como $c = c(S_t, t)$. Ahora bien, durante el intervalo de tiempo $[t, t + dt]$, el activo subyacente cambia de S_t a $S_t + dS_t$, en consecuencia, el precio de la opción cambia de c a $c + dc$. El cambio marginal en el precio de la opción se obtiene mediante el lema de Itô (ver Apéndice I), como:

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t \tag{3}$$

Dinámica de un portafolio combinado del subyacente y su opción

Considere ahora un portafolio con ω_1 unidades del activo subyacente de precio S_t y ω_2 unidades de una opción de compra sobre el subyacente de precio $c(S_t, t)$. Si Π_t denota el valor actual, al tiempo t, del portafolio, entonces

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t). \tag{4}$$

El cambio en el valor del portafolio, durante el instante , debido a fluctuaciones propias del mercado está dado por

$$d\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 dc. \tag{5}$$

Después de sustituir (1) y (3) en (5), se obtiene la siguiente expresión para el cambio de valor del portafolio:

$$d\Pi_t = \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t}\right) \mu S_t \, dt + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t}\right) \sigma S_t \, dW_t + \omega_2 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right) dt. \quad (6)$$

La ecuación (6) contiene dos tipos de términos. Los términos de tendencia, multiplicados por dt, y el término aleatorio, multiplicado por dW_t. Este último, modela el riesgo de mercado del portafolio, el cual se puede eliminar si se eligen, adecuadamente, las cantidades de ω_1 y ω_2 en la conformación del portafolio.

Administración del riesgo de mercado

A fin de eliminar el riesgo de mercado del portafolio se deben seleccionar ω_1 y ω_2 de tal manera que se anule el coeficiente de dW_t en el término estocástico de la ecuación (6), es decir,

$$\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} = 0.$$

Claramente, existen infinitas posibilidades de seleccionar ω_1 y ω_2 para lograr el objetivo. Si, por ejemplo, se toman $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\mathrm{A}$, se tiene que

$$d\Pi_t^{(\mathrm{A})} = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right) dt. \quad (7)$$

Es usual referirse a esta elección particular de $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\mathrm{A}$ como cobertura Delta. Esta estrategia de cobertura perfecta es dinámica, ya que durante el periodo $[t, t + dt]$ la cantidad $\partial c/\partial S_t$ cambia con S_t y t. Evidentemente, la cobertura Delta es aplicable sólo durante el instante dt. De otra manera, al transcurrir el tiempo, la cobertura se deteriora paulatinamente perdiendo su efectividad. Por lo tanto, si se emplea esta cobertura en (4), se obtiene $\Pi_t^{(\mathrm{A})} = c - \mathrm{A} S_t$ lo cual significa que está cubriendo una venta en corto de A unidades del subyacente con una opción de compra sobre una acción.

Cuenta bancaria

Se supone que existe un mercado de crédito libre de riesgo de incumplimiento, es decir, un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar o pedir prestado a una tasa constante, r, a todos los plazos y, en consecuencia, libre de riesgo de mercado, la cual se aplica en forma continuamente capitalizable. Por ejemplo, si un agente deposita b_0 unidades monetarias, entonces el saldo en su cuenta bancaria, al tiempo t, está dada por $b_t = b_0 e^{rt}$. De esta manera, el rendimiento en su cuenta satisface $db_t = rb_t dt$, junto con la condición inicial $b_{(0)} = b_0$.

Inversión alternativa del valor del portafolio

Bajo la elección $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\mathrm{A}$, el valor del portafolio resultante es ${}_t^{(\mathrm{A})} = c - \mathrm{A}S_t$. Si esta cantidad se deposita en un banco que paga una tasa de interés r, entonces el cambio en el valor del portafolio, durante dt, es

$$d\,{}_t^{(r)} = {}_t^{(\mathrm{A})} r\,dt = (c - \mathrm{A}S_t) r\,dt. \tag{8}$$

En este caso, dt es el tiempo en el que se aplica la tasa r.

Condiciones de no arbitraje

Bajo el supuesto de no arbitraje, se tiene que

$$d\,{}_t^{(\mathrm{A})} = d\,{}_t^{(r)}. \tag{9}$$

En efecto, si la tasa de rendimiento del portafolio combinado fuera más grande que el interés que paga el banco, entonces se pediría prestado, en t, al banco la cantidad $-\mathrm{A}S_t + c$ para invertir en el portafolio de acciones y opciones. Posteriormente, en $t + dt$ se le pagan al banco los intereses más el capital y el restante representa una ganancia libre de riesgo. Por otro lado, si el rendimiento del portafolio fuera menor que el interés que paga el banco, entonces se debe invertir el dinero en el banco, pues la aplicación de una cobertura Delta carece de sentido.

Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton

En esta sección se obtiene una de las ecuaciones más importantes en finanzas. Una forma alternativa de escribir (9) es

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt = \left(-\frac{\partial c}{\partial S_t} S_t + c \right) r dt. \tag{10}$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r - rc = 0. \tag{11}$$

la cual es conocida como la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton. Las condiciones de frontera y final para determinar una solución única están dadas, respectivamente, por

$$c(0, t) = 0 \text{ y } c(S_t, T) = max(S_t - K, 0),$$

donde K es el precio de ejercicio de la opción. La primera condición dice que si el activo es gratuito, entonces el derecho de comprarlo en el futuro carece de valor y la segunda condición expresa la ganancia del propietario del derecho de compra en la fecha de vencimiento. La ecuación (11) es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica. De hecho, casi todas las ecuaciones diferenciales parciales en matemáticas financieras tienen una forma similar. La linealidad significa que si se tienen dos soluciones, entonces la suma de ellas también es una solución. En otras palabras, si todos los activos de un portafolio satisfacen la ecuación (11), entonces el portafolio también satisface. Por último, el hecho de que la ecuación diferencial parcial sea parabólica significa que está relacionada con la ecuación de difusión de calor. Esta ecuación describe cómo se difunde el calor en una viga (hecha de algún material conductor) de dimensión infinita. En este caso, la temperatura en un punto de la viga está asociada al rendimiento del activo.

La ecuación de Black-Scholes-Merton contiene todas las variables que determinan el valor del contrato y los parámetros tales como el precio de contado del activo subyacente, el tiempo y la volatilidad, pero no se hace mención al rendimiento medio esperado μ. Cualquier dependencia sobre μ se ha eliminado al anular el coeficiente de dW_t en el cambio de valor del portafolio. Observe que en su lugar aparece, en la ecuación (11), la tasa de interés libre de riesgo. Esto significa que si todos los participantes en el mercado de opciones están de acuerdo con el nivel de volatilidad del activo, entonces están igualmente de acuerdo con el valor de la opción aunque tengan diferentes preferencias al riesgo expresadas a través de μ. En otras palabras, todos los agentes están dispuestos a omitir sus preferencias al riesgo, μ, y aceptar un rendimiento libre de riesgo, r, después de ponerse de acuerdo con el nivel de volatilidad del activo.

Mercados completos

En esta sección se presenta, de manera intuitiva, el concepto de mercados completos, el cual consiste en la posibilidad de replicar el precio de una opción a través del valor de un portafolio de acciones y efectivo. Observe primero que a partir de la ecuación (8), se cumple que

$$\mathrm{A}S_t + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{dt} d \frac{(r)}{t}\right) = c \qquad (12)$$

Si se escribe $b_t = {}^{-1}_{t}(r)$, entonces ${}^{-1}_{t}(r) = db_t = rb_t dt$ y (12) se transforma en $\mathrm{A}S_t + b_t = c$, es decir, si se diseña un portafolio que tiene acciones, en una cantidad A, y efectivo b_t, entonces se puede replicar el precio de la opción.

III. Derivación de la ecuación de BSM mediante la cobertura de la riqueza

Suponga que un inversionista comienza con un cierto nivel de riqueza, A_0, e invierte una cantidad A_t en un en un activo con riesgo, de precio S_t, y el resto en otro activo que paga una tasa de interés constante, r, a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento, de tal manera que la dinámica de acumulación de su riqueza queda representada por

$$dA_t = \mathrm{A}_t dS_t + r[A_t - \mathrm{A}_t S_t]d_t.$$

Es decir,

$$dA_t = r[A_t + \mathrm{A}_t S_t(\mu - r)]dt + \mathrm{A}_t \sigma S_t dW_t.$$

Sea $c(S_t, t)$ el precio de una opción europea de compra que paga en el vencimiento $max(S_T - K, 0)$, Si se desea cubrir el portafolio con una opción de tal manera que $c(S_t, t) = A_t$ para toda t, entonces $dc = dA_t$ son iguales. Después de sustituir (3) en $dc = dA_t$ e igualar términos estocásticos y deterministas se encuentra de nuevo ecuación diferencial parcial de BSM.

IV. Obtención de la ecuación BSM mediante el modelo CAPM

A continuación se obtiene la ecuación de Black-Scholes-Merton mediante el modelo CAPM, el cual es utilizado con mucha frecuencia para valuar acciones. El modelo CAPM describe la relación entre el riesgo y el rendimiento esperado de un activo y es muy útil para valuar acciones (títulos de capital) que emiten las empresas para financiarse. Específicamente, el modelo CAPM dice que la diferencia entre el rendimiento de una acción y la tasa de CETES (Certificados de la Tesorería) es proporcional a la diferencia entre el rendimiento del IPC (Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores) y la tasa de CETES. Suponga, como antes, que la dinámica del precio del activo subyacente es conducida por el movimiento geométrico Browniano, es decir, el rendimiento del activo es

$$dR_s = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{13}$$

Para calcular el cambio marginal en el precio de la opción se utiliza la ecuación (3). Para calcular el cambio marginal en el precio de la opción por cambios en S_t, se utiliza la expansión en serie de Taylor hasta términos de segundo orden:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 dt. \tag{14}$$

Observe también que el rendimiento de la opción se puede describir como

$$dR_c = \frac{\partial c}{\partial S_t} dR_S \frac{S_t}{c} + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right)dt. \tag{15}$$

De acuerdo con el modelo CAPM, los rendimientos de la opción y del activo subyacente satisfacen, respectivamente, las siguientes condiciones lineales con respecto al rendimiento del mercado, dR_M,

$$E[R_c] - rdt = \beta_c[E[dR_M] - rd_t] \tag{16}$$

y

$$E[R_S] - rdt = \beta_S[E[dR_M] - rd_t], \tag{17}$$

donde

$$\beta_S = \frac{Cov(dR_S, dR_M)}{Var(dR_M)} \tag{18}$$

y

$$\beta_c = \frac{Cov(dR_c, dR_M)}{Var(dR_M)} = \frac{Cov\left(\frac{\partial c}{\partial S_t} dR_S \frac{S_t}{c}, dR_M\right)}{Var(dR_M)} = \frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{S_t}{c}\beta_S \quad (19)$$

ya que $Cov(dt, dR_M) = 0$. Si se sustituyen las ecuaciones (15), (17), (18) y (19) en (16), se tiene

$$E\left[\frac{dc}{c}\right] - rdt = \beta_c(E[dR_M] - rdt) = \frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{S_t}{c}(E[dR_S] - rdt), \quad (20)$$

lo cual implica que

$$E[dc] - rcdt = \frac{\partial c}{\partial S_t}(E[dR_S] - rdt). \quad (21)$$

Si se sustituye la ecuación (13) en (21), se sigue que

$$E[dc] - rcdt = \frac{\partial c}{\partial S_t}(E[dR_S] - rdt) = \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t(\mu - r)dt, \quad (22)$$

donde se ha considerado que

$$E[dW_t] = 0. \quad (23)$$

Por último, si se sustituye (14) en la ecuación (22) se tiene la ecuación diferencial parcial de BSM

V. Obtención de la ecuación BSM mediante portafolio replicantes

Se desea determinar un portafolio combinado de una posición larga del activo subyacente y un depósito bancario que, en cada instante, repliquen el valor de una opción europea de compra. Se supone que el activo subyacente y la opción se negocian en forma continua de tal manera que el riesgo se elimine en todo momento, es decir, la cobertura es dinámica. Se supone, como siempre, que el precio del activo subyacente, St, sigue un movimiento geométrico Browniano. Asimismo, se supone que en la economía existe un sistema bancario que paga por depósitos una tasa constante y libre de riesgo r. De esta manera, si se hace un depósito de bt unidades monetarias, el rendimiento de dicha inversión, en el instante dt, es

$$R_b = \frac{db_t}{b_t} = rdt. \quad (24)$$

Portafolio replicantes

Se desea determinar un portafolio que combine una posición larga del activo subyacente con un depósito bancario que replique el valor de una opción europea de compra. Suponga que se desean encontrar procesos estocásticos $\mathrm{v}_t = \mathrm{v}(S_t, t)$ y $\mathrm{w}_t = \mathrm{w}(S_t, t)$, tales que

$$\mathrm{v}_t S_t + \mathrm{w}_t b_t = c(S_t, t), 0 \leq t \leq T \tag{25}$$

La condición (25) indica que no existen posibilidades de arbitraje. Por ejemplo, si, antes del vencimiento, el lado izquierdo de (25) fuera menor que el lado derecho, se toma una posición corta en la opción de compra y la prima se invierte inmediatamente en el portafolio combinado a fin de generar una ganancia libre de riesgo. Asimismo, se supone que en la fecha de vencimiento la ecuación (25) también se cumple sin importar la trayectoria que tome el activo subyacente.

Portafolio autofinanciables

Se supone que una vez que se ha realizado la inversión inicial no se requieren fondos adicionales para mantener el portafolio, de tal forma que los cambios requeridos en vt se compensen con cambios, con signo opuesto, en wt. Así,

$$S_t d\mathrm{v}_t + b_t dW_t = 0. \tag{26}$$

Esto significa que

$$\mathrm{v}_t dS_t + \mathrm{w}_t db_t = dc(S_t, t). \tag{27}$$

Después de sustituir (24) en (27), se obtiene

$$\mathrm{v}_t(\mu S_t\, dt + \sigma S_t dW_t) + \mathrm{w}_t r b_t dt = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t dW_t \tag{28}$$

Si se igualan los coeficientes de dWt en (29), se obtiene

$$\mathrm{v}_t = \left(\frac{\partial c}{\partial S_t} \right). \tag{29}$$

De la misma manera, de (25) se sigue que

$$\mathrm{w}_t = \frac{c(S_t, t) - \mathrm{v}_t S_t}{b_t} \tag{30}$$

Las cantidades v_t y w_t determinan el portafolio replicante del valor del derivado, el cual para su mantenimiento es autofinanciable.

Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton

A continuación se obtiene la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton. Si ahora se igualan los términos en dt, se sigue que

$$v_t \mu S_t + w_t r b_t = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt \tag{31}$$

Después de sustituir (29) y (30) en (31), se obtiene la ecuación diferencial parcial de BSM.

VI. Obtención de la ecuación BSM mediante el valor presente neto

En esta sección se obtiene la fórmula de Black-Scholes-Merton para calcular el precio de una opción europea de compra mediante el valor presente de las ganancias esperadas. Se supone que el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato y que su precio es conducido por un movimiento geométrico Browniano. Con este propósito se determina, primero, la función de densidad del precio del subyacente en la fecha de vencimiento. Posteriormente, se calcula la integral que define el valor presente del valor intrínseco esperado, cantidad que proporciona el precio teórico del producto derivado en cuestión.

Distribución del rendimiento logarítmico del subyacente

Considere un movimiento Browniano (también llamado proceso de Wiener) $(W_t)_{t\in[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración $\left(\Omega, F(F_t)_{t\in[0,T]}, P\right)$. Se supone que el precio de una acción al tiempo t, S_t, es conducido por el movimiento geométrico Browniano. Una simple aplicación del lema de Itô (véase el Apéndice I) conduce a

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \tag{32}$$

Si se discretiza la ecuación anterior con $\Delta t = T - t$, entonces se obtiene

$$\ln S_T - \ln S_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) + \sigma \sqrt{T - t}\,\varepsilon, \tag{33}$$

donde □ $N(0,1)$. Por lo tanto,

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) N\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma^2(T-t)\right). \tag{34}$$

En otras palabras, el rendimiento logarítmico tiene distribución normal con la misma varianza del cambio porcentual de S_t, pero con parámetro de tendencia, $\mu \frac{1}{2}\sigma^2$; menor al rendimiento medio esperado, μ.

Valuación neutral al riesgo

Debido a la consideración de un rendimiento esperado μ, la ecuación (32) no es independiente de las preferencias al riesgo de los agentes que participan en el mercado del subyacente. En efecto, entre mayor sea la aversión al riesgo de un agente, mayor tiene que ser el rendimiento medio esperado, μ, a fin de que el premio $v = \mu - r$ le sea atractivo al agente. Si se supone que todos los agentes son neutrales al riesgo, es decir, no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces $v = 0$, así, $\mu = r$ y de esta manera el rendimiento medio esperado de cualquier activo es la tasa de interés libre de riesgo, r. Otra forma de medir el premio al riesgo, de uso más frecuente, consiste en estandarizar v por unidad de varianza (más precisamente por unidad de desviación estándar), es decir, $\lambda = v/\sigma$. En este caso, si σ aumenta, entonces λ, disminuye y el agente pediría más v para compensar el aumento en σ hasta conseguir que λ aumente y alcance su nivel inicial. De igual forma el agente podría aceptar una disminución v a cambio de una disminución en σ. Como antes, si los agentes no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces $\lambda = 0$. Ahora bien, si se escribe

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t + \sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t\right) \\ &= rS_t dt + \sigma S_t(\lambda dt + dW_t), \end{aligned} \tag{35}$$

entonces, bajo el supuesto de neutralidad al riesgo, $\lambda = 0$, se tiene un movimiento Browniano de la forma

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{36}$$

Función de densidad del precio del activo

En esta sección se obtiene la función de densidad del precio del activo subyacente bajo el supuesto de neutralidad al riesgo. En vista de (36), se tiene que $ln(S_T/S_t)$, tiene una distribución normal con media $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)$ y varianza $\sigma^2(T - t)$. Considere $\varepsilon \sim N(0, 1)$ y su densidad

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}, \quad \varepsilon \in R. \tag{37}$$

Si se define ahora

$$g(\varepsilon) := S_T = S_t \exp\left[(r - \tfrac{1}{2}\sigma^3)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}\,\varepsilon\right] \tag{38}$$

se tiene que

$$g^{-1}(S_t) = \frac{ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \tag{39}$$

De esta manera, la función de densidad de S_T, dado S_t, está dada por la expresión de cambio de variable

$$f_{S_T/S_t}(s|S_t) = \varphi g^{-1}(s)\left|\frac{dg^{-1}(s)}{ds}\right|. \tag{40}$$

Es decir,

$$f_{S_T/S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T - t)}\sigma s} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{ln\frac{s}{S_t} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right]^2\right\}. \tag{41}$$

Esta función de densidad condicional se utilizará para calcular el valor presente neto de una opción europea.

Valuación neutral al riesgo de una opción europea de compra

El precio de una opción de compra europea en t con precio de ejercicio K y vencimiento en T, $c = c(S_t t; K, r, \sigma)$, está dado por

$$\begin{aligned} c &= e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} max(s - K, 0)\, f_{S_T|S_t}(s|S_t)ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (s - K)\, f_{S_T|S_t}(s|S_t)ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{s>K} s f_{S_T|S_t}(s|S_t)ds - K e^{-r(T-t)} \int_{s>K} f_{S_T|S_t}(s|S_t)ds. \end{aligned} \tag{42}$$

La primera integral representa el valor presente del valor medio esperado del pago de la opción en la fecha de vencimiento. Las dos integrales de (42) se denotarán mediante I_1 y I_2. Si ahora se utiliza un cambio de variable, la primera integral se calcula como

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= e^{-1(T-t)} S_t \cdot \int_{\left\{\varepsilon > \frac{\ln(K/S_t)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\varepsilon^2} e^{\sigma\sqrt{T-t}(\varepsilon)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} d\varepsilon \\
&= S_t \int_{\{-\infty<\mu<d_1\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \qquad (43)
\end{aligned}
$$

donde d_1 se define como en (47) y donde se ha utilizado el hecho de que $\varepsilon \sim N(0,1)$ con un cambio de variable $u = \varepsilon - \sigma\sqrt{T-t}$. Las expresiones entre llaves de las integrales anteriores son los conjuntos de integración. Asimismo, a partir del cambio de un variable, la segunda integral satisface

$$
\begin{aligned}
I_2 &:= -K e^{-r(T-t)} \int_{\left\{\varepsilon > \frac{\ln(K/S_t)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \\
&= -K e^{-r(T-t)} \int_{\{-\infty<\varepsilon<d_2\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon)^2} d\varepsilon. \qquad (44)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, de (43) y (44) se sigue que

$$
c = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \qquad (45)
$$

donde la función Φ es la función de distribución acumulada de $\varepsilon \sim N(0,1)$; es decir,

$$
\Phi(d) = P_\varepsilon(\varepsilon \leq d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon = 1 - \Phi(-d), \qquad (46)
$$

$$
d_1 = d_1(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad (47)
$$

$$
d_2 = d_2(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \qquad (48)
$$

Las ecuaciones (45) y (11) son equivalentes en el sentido de que (45) es la única solución de (11).

VII. Obtención de la ecuación BSM mediante el modelo de Markowitz

Se supone ahora que el individuo tiene acceso a tres activos reales: una acción de precio S_t, una opción sobre la acción de precio $c = c(S_t, t)$ y un bono de precio b_t libre de riesgo de incumplimiento que paga tasa fija r. Suponga que el rendimiento que paga el activo subyacente es

$$dR_S = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{49}$$

Asimismo, suponga que el rendimiento que paga el bono está dado por

$$dR_b = r dt. \tag{50}$$

En vista de (50), la aplicación del lema de Itô a $c = c(S_t, t)$ conduce a que el rendimiento de la opción en (15) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} dR_c &= \frac{dc}{c} \\ &= \frac{1}{c}\left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t\right] \mu_c dt + \sigma_c dW_t, \end{aligned} \tag{51}$$

donde

$$\mu_c = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)\frac{1}{c}$$

y

$$\sigma_c = \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \frac{1}{c}$$

Se supone que $c(S_t, T) = max(S_t - K, 0)$, donde K es el precio de ejercicio de la opción. Sea $\alpha_{1t} = S_t / A_t$ la proporción de la riqueza que el individuo asigna a la tenencia de acciones, $\alpha_{2t} = c / A_t$ la proporción de la riqueza que asigna a una opción europea de compra sobre la acción, y $1 - \alpha_{1t} - \alpha_{2t}$ la fracción complementaria que se asigna a un instrumento libre de riesgo que paga un rendimiento r constante a cualquier plazo. En este caso, la riqueza, A_t, satisface

$$dA_t = A_t(1 - \alpha_{1t} - \alpha_{2t})dR_b + A_t\alpha_{1t}dR_S + A_t\alpha_{2t}dR_c. \tag{52}$$

Después de sustituir (49) y (51) en la ecuación de la riqueza, ésta se puede reescribir como

$$dA_t = A_t(r + (\mu - r)\alpha_{1t} + (\mu_c - r)\alpha_{2t})dt + A_t(\alpha_{1t}\sigma + \alpha_{2t}\sigma_c)dW_t.$$

En este caso, se sigue que

$$\mu_A = E\left[\frac{dA_t}{A_t}\right]\frac{1}{dt} = r + (\mu - r)\alpha_{1t} + (\mu_c - r)\alpha_{2t}$$

y

$$\sigma_A^2 Var\left[\frac{dA_t}{A_t}\right]\frac{1}{dt} = (\alpha_{1t}\sigma + \alpha_{2t}\sigma_c).$$

Como antes, considere ahora el problema de decisión sobre las proporciones de la riqueza, A_t, que se asignan a los diferentes activos:

$$\text{Minimizar}_{\alpha_{1t},\alpha_{2t}} \frac{1}{2}\sigma_A^2 = \frac{1}{2}(\alpha_{1t}, \alpha_{2t})\begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma\sigma_c \\ \sigma\sigma_c & \sigma_c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{1t} \\ \alpha_{2t} \end{pmatrix} \tag{53}$$

sujeto a:

$$\mu_a = r + (\alpha_{1t}, \alpha_{2t})\begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} = \mu_0.$$

El Lagrangeano asociado al problema anterior de programación no lineal es

$$L \equiv \frac{1}{2}(\alpha_{1t}\sigma + \alpha_{2t}\sigma)^2 + v[\mu_0 - r - \alpha_{1t}(\mu_1 - r) - \alpha_{2t}(\mu_2 - r)],$$

donde v es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción. Las condiciones de primer orden $\partial L/\partial\sigma_{1t}$, $i = 1, 2$, conducen a

$$\alpha_{1t}\sigma + \alpha_{2t}\sigma_c = v\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)$$

y

$$\alpha_{1t}\sigma + \alpha_{2t}\sigma_c = v\left(\frac{\mu_c - r}{\sigma_c}\right).$$

En consecuencia,

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\mu_c - r}{\sigma_c}.$$

Después de sustituir μ_c y σ_c en la ecuación anterior se tiene la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton.

VIII. Obtención de la ecuación de BSM mediante el postulado de racionalización económica

Esta sección muestra que la consistencia de la existencia de consumidores racionales con los resultados derivados de principios financieros fundamentales como son: condiciones de no arbitraje, argumentos del modelo CAPM, portafolios replicantes y autofinanciables, valor presente de las ganancias esperadas y el modelo de Markowitz. Se supone ahora que el individuo tiene acceso a tres activos reales: una acción de precio S_t, una opción sobre la acción de precio $c = c(S_t, t)$ y un bono de precio bt libre de riesgo de incumplimiento que paga tasa fija r. Suponga que el rendimiento que paga el activo subyacente es

$$dR_S = \mu dt + \sigma dW_t. \tag{54}$$

Asimismo, suponga que el rendimiento que paga el bono está dado por

$$dR_b = r dt. \tag{55}$$

En vista de (54), la aplicación del lema de Itô a $c = c(S_t, t)$ conduce a que el rendimiento de la opción satisface

$$dR_c = \frac{dc}{c} = \mu_c dt + \sigma_c dW_t, \tag{56}$$

donde μ_c y σ_c se definen como en (51). Sea a_t la riqueza real del individuo y sean $w_{1t} = S_t/a_t$ la proporción de la riqueza que el individuo asigna a la tenencia de acciones,$w_{2t} = c/a_t$ la proporción de la riqueza que asigna a una opción europea de compra sobre la acción, y $1 - w_{1t} - w_{2t}$ la fracción que se asigna a un instrumento libre de riesgo que paga un rendimiento r constante a cualquier plazo. La variable w_{it} es diferente de α_{it}, la cual fue introducida en la sección anterior en (52), ya que w_{it} incorpora la decisión de consumo. Por la misma razón, la A_t de (52) y la a_t

de (58) son diferentes. En este caso, el agente desea resolver el siguiente problema (*cf*. Merton (1969) y (1971):

$$\text{Maximizar}_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} E\left[\int_0^T \frac{C_S^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + b(a_T, T) | F_t\right], \qquad (57)$$

sujeto a:

$$da_t = a_t w_{1t} dR_S + a_t w_{2t} dR_c + a_t(1 - w_{1t} - w_{2t}) dR_b - C_t dt, (58) \qquad (58)$$

donde C_t es consumo, γ es un parámetro de preferencias (grado de aversión al riesgo), δ es la tasa subjetiva de descuento (entre mayor es δ más ansioso está el consumidor por el consumo presente), F_t es la información relevante al tiempo t y

$$b(a_T, T) = \frac{a_T^\gamma}{\gamma} e^{-\delta T}$$

denota una herencia. Después de sustituir (54)-(56) en la restricción presupuestal, ésta se puede reescribir como

$$da_t = a_t \left\{ r + (\mu - r) w_{1t} + (\mu_c - r) w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right\} dt + a_t (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c) dW_t.$$

Si se define (la función de utilidad indirecta)

$$J(a_t, t) = max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} E\left[\int_{t+dt}^T \frac{C_S^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + b(a_T, T) | F_t\right],$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
J(a_t, t) &= \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} \\
&\quad E\left[\int_t^{t+dt} \frac{C_S^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + \int_{t+dt}^T \frac{C_S^\gamma}{\gamma} e^{\delta s} ds + b(a_T, T) | F_t\right] \\
&= \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t} | [t, t+dt]} \\
&\quad E\left[\int_t^{t+dt} \frac{C_S^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + J(a_t + da_t, t + dt) | F_t\right] \\
&= \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t} | [t, t+dt]} \\
&\quad E\left[\int_t^{t+dt} \frac{C_S^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt + o(dt) + J(a_t + t) + dJ(a_t, t) | F_t\right].
\end{aligned}$$

en donde se ha utilizado la recursividad de J y una aproximación de primer orden del teorema de Taylor. Observe también que $J(a_T, T) = b(a_T, T)$. Con base en el lema de Itô, aplicado a $J = J(a_t, t)$, y en virtud del teorema del valor medio del cálculo integral, se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 = max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} E \Bigg[& \frac{C_t^{\gamma}}{\gamma} e^{-\delta t} dt + o(dt) \\
& + \Bigg[J_t + J_a a_t \left\{ r + (\mu - r) w_{1t} + (\mu_c - r) w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right\} \\
& + \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)^2 \Bigg] dt + J_a a_t (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c) dW_t | F_t \Bigg]
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Si se toman esperanzas dentro del paréntesis y, posteriormente, se divide entre dt y se toma el límite cuando $dt \to 0$; se sigue que

$$
\begin{aligned}
0 = \text{máx}_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} \Bigg\{ & \frac{C_t^{\gamma}}{\gamma} e^{-\delta t} + J_t + J_a + \\
& \left\{ r + (\mu - r) w_{1t} + (\mu_c - r) w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right\} + \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)^2 \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Observe que en la expresión anterior $odt/dt \to 0$ cuando $dt \to 0$. En lugar de resolver la ecuación diferencial parcial anterior, que no es la intención del presente trabajo, se propone un candidato de solución:

$$J(a_t, t) = V(a_t) e^{-\delta t},$$

entonces

$$J_a = V'(a_t) e^{-\delta t}, \; J_{aa} = V'(a_t) e^{-\delta t},$$

y

$$J_t = -\delta V'(a_t) e^{-\delta t}$$

Ahora bien, si C_t,w_{1t} y w_{2t} son óptimos, se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 - \frac{C_t^{\gamma}}{\gamma} - \delta V(a_t) + V'(a_t) a_t & \left\{ r + (\mu - r) w_{1t} + (\mu_c - r) w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right\} \\
& + \frac{1}{2} V'(a_t) a_t^2 (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)^2 .
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Suponga

$$V(a_t) - \beta \frac{a_t^{\gamma}}{\gamma},$$

entonces

$$V'(a_t) = \beta a_t^{\gamma-1} \;\; \text{y} \;\; V'(a_t) = \beta(\gamma - 1) a_t^{\gamma-2}.$$

De esta manera, la ecuación (61) se transforma en

$$0 = \frac{C_t^{\gamma}}{\gamma} - \delta\beta\frac{a_t^{\gamma}}{\gamma} + \beta a_t^{\gamma} \left[r + (\mu - r) w_{1t} + (\mu_c - r) w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right] + \frac{1}{2}\beta(\gamma - 1) a_t^{\gamma} (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)^2. \quad (62)$$

Al derivar la expresión anterior con respecto de C_t, w_{1t} y w_{2t}, se obtienen, respectivamente:

$$C_t^{\gamma-1} - \beta a_t^{\gamma-1} = 0 \quad (63)$$

$$\beta a_t^{\gamma}(\mu - r) + \beta(\gamma - 1) a_t^{\gamma}(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma = 0$$

y

$$\beta a_t^{\gamma}(\mu_c - r) + \beta(\gamma - 1) a_t^{\gamma}(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma_c = 0.$$

Estas tres ecuaciones se pueden reescribir como:

$$C_t = \beta^{1/\gamma - 1} a_t,$$

$$\mu - r = (1 - \gamma)(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma, \quad (64)$$

$$\mu_c - r = (1 - \gamma)(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma_c. \quad (65)$$

La primera ecuación indica que el consumo es proporcional al nivel de la riqueza. Las dos últimas ecuaciones implican que los premios al riesgo de S_t y $c(S_t, t)$ son iguales, es decir,

$$\frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (66)$$

Después de sustituir μ_c y σ_c en la ecuación anterior se tiene la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton.

IX. Conclusiones

Este trabajo ha proporcionado diversas pruebas indirectas que muestran que postular la existencia de consumidores hiper-racionales, aunque es falso, es "conveniente" para el desarrollo "adecuado" de la teoría económica. La EDP de segundo grado de BSM cuya solución determina el precio de un producto derivado se obtuvo bajo diferentes principios financieros, tales como: condiciones de no arbitraje, CAPM, portafolios replicantes y autofinanciables, VPN y el modelo de Markowitz. Posteriormente, se obtuvo exactamente la misma ecuación (de BSM) utilizando el postulado de racionalidad económica. Esto significa que dicho postulado es, plenamente, consistente con los conceptos centrales que se utilizan en la teoría y práctica financiera.

Por último, es importante destacar que aunque el problema del consumidor-inversionista racional se resolvió utilizando una forma funcional específica del índice de satisfacción, la obtención de ecuación diferencial parcial de BSM es independiente de la función de utilidad.

Apéndice I. El lema de Itô

Considere una función arbitraria $y = (f, S_t)$ donde S_t sigue una ecuación diferencial estocástica de la forma $dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$, la diferencial estocástica de y, dy, se obtiene mediante la expresión:

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 y}{\partial^2 y}\partial S_t^2 \right) dt + \frac{\partial y}{\partial S_t}\sigma S_t\,dW_t.$$

Notas

[1] Profesor Investigador de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional. El autor desea agradecer los múltiples comentarios de un dictaminador anónimo.

Referencias bibliográficas

Black, F. y M. Scholes, 1973, "The Pricing of Option and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637–654.

Markowitz, H.M., 1952, "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, vol. 7, no. 1, pp. 77–99.

Merton, R.C., 1973, "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics*, vol. 4, no. 1, pp. 141–183.

———, 1971, "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-time Model", *Journal of Economic Theory*, vol. 3, no. 4, pp. 373–413.

———, 1969, "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case", *Review of Economics and Statistics*, vol. 51, no. 2, pp. 247–257.

Sharpe, W.F., 1964, "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk", *Journal of Finance*, vol. 19, no. 3, pp. 425–42.

Simon, H., 1957, "A Behavioral Model of Rational Choice", en *Model of Man, Social and Rational: Mathematical Essay on Rational Human Behavior in a Social Setting*, Wiley, New York.

Smith, V.L., 1962, "An Experimental Study of Competitive Market Behavior", *Journal of Political Economy*, vol. 70, pp. 111–137.

Venegas-Martínez, F., 2008, "Temporary Stabilization in Developing Countries and the Real Option of Waiting when Consumption Can Be Delayed", *International Journal of Economic Research*, vol. 7, forthcoming.

———, 2006a, "Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks", *Economic Modelling*, vol. 23, no. 1, pp. 13–38.

———, 2006b, "Fiscal Policy in a Stochastic Temporary Stabilization Model: Undiversifiable Devaluation Risk", *Journal of World Economic Review*, vol. 1, no. 1, pp. 13–38.

———, 2006c, *Riesgos financieros y económicos. (Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre)*, International Thomson Editores, Madrid.

———, 2005, "Bayesian Inference, Prior Information on Volatility, and Option Pricing: A Maximum Entropy Approach", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol. 8, no. 1, pp. 1–12.

———, 2001, "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 25, no. 9, pp. 1429–1449.

Publicaciones de la Cátedra Bolívar.
Facultad de Economía y Empresa de la USC. Director Luis Caramés Vieitez
Temas de Teoría Económica
Documentos 103 a 118 de la Serie Economic Development de la USC

Los Temas de Teoría Económica han sido publicados en formato impreso en el año 2008 por la Cátedra Bolívar: http://www.usc.es/es/goberno/vrrelins/catedras/bolivar/index.html
USC= Universidad de Santiago de Compostela (España)
UMSNH= Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (México)

ACCESO A LOS DOCUMENTOS del año 2011 en la Web de la serie *Economic Development*, en la base internacional Ideas.Repec: http://ideas.repec.org/s/eaa/ecodev.html

Documento 103: "INTRODUCCIÓN A LAS INTERRELACIONES DE LA METODOLOGÍA EN TEMAS DE ECONOMÍA". Juan José Jardón Urrieta. UMSNH, México
Documento 104: "FILOSOFÍA Y METODOLOGÍA DE LA ECONOMÍA", Uskali Mäki, Academy of Finland, University of Helsinki, Finland
Documento 105: "METOLOGÍA Y POLÍTICA ECONÓMICA: UNA RECONSIDERACIÓN", Andrés FERNÁNDEZ DÍAZ, Lorenzo Escot Mangas, Facultad de Economía, Universidad Complutense de Madrid (UCM), España
Documento 106. "UNA TIPOLOGÍA DE MODELOS ECONÓMICOS", Leobardo Plata Pérez, Facultad de Economía, Universidad Autónoma de San Luis de Potosí, México
Documento 107. "¿QUÉ PAPEL HAN JUGADO LOS MODELOS EN ECONOMÍA?", Alfonso Ávila De Palacio, Universidad Juárez del Estado de Durango, México
Documento 108. "CRECIMIENTO ECONÓMICO: UN DEBATE CENTRAL DE LAS ECONOMÍAS CLÁSICA Y MARXISTA", Gabriel Mendoza Pichardo, Facultad de Economía, UNAM, México
Documento 109. "LA DISCUSIÓN ACTUAL SOBRE EL PROBLEMA DE LA TRANSFORMA-CIÓN DE VALORES A PRECIOS DE PRODUCCIÓN", Alejandro Valle Baeza, Facultad de Economía, UNAM, México
Documento 110. "LA ESCUELA AUSTRÍACA: ¿UNA PROPUESTA METODOLÓGICA ACTUAL?", Eduardo Scarano, FCPS, Universidad de Buenos Aires, Argentina
Documento 111. "¿PARA QUÉ SE ESTUDIA LA TEORÍA ECONÓMICA?", Hall R. Varian, School of Information. University of California Berkeley, USA
Documento 112. "LA PERSPECTIVA DE LA MACROECONOMÍA POSTWALRASIANA", David Colander, Department of Economics, Middleburry College, Vermont, USA
Documento 113. "ALGUNOS PRINCIPIOS FINANCIEROS QUE SON CONSISTENTES CON EL POSTULADO DE RACIONALIDAD ECONÓMICA, Francisco Venegas-Martínez, Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional, México
Documento 114. "LOS MODELOS ECONOMÉTRICOS Y EL REALISMO ECONÓMICO", Willy W. Cortez, CUCEA, Universidad de Guadalajara, México
Documento 115. "FACTORES QUE INCIDEN EN EL STATUS EPISTEMOLÓGICO DE LA ECONOMETRÍA", María-Carmen GUISÁN, Universidad de Santiago de Compostela, España
Documento 116. "SELECCIÓN NATURAL: UNA VISIÓN ARQUITECTÓNICA Y UN TRASVASE CONCEPTUAL DESDE LA ECONOMÍA, Mario Casanueva López
Documento 117. "LA TEORÍA DE JUEGOS EVOLUTIVOS, NATURALEZA Y RACIONALIDAD", Elvio Accinelli. Facultad de Economía UASLP y UAM-1, México
Documento 118. "LAS VARIABLES LATENTES COMO EL NÚCLEO DEL PROCESO DE SELECCIÓN DE LA TEORÍA EVOLUCIONISTA, Juan José Jardón Urrieta (UMSNH), Mexico y Adolfo García de la Sienra, Instituto de Filosofía. Facultad de Economía. Universidad Veracruzana, México.